Soient p et q les deux endomorphismes, de l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}[X]$ des polynômes à une indéterminée, qui associent respectivement au polynôme P les polynômes X P et P' (polynôme dérivé de P). On note A le sous-espace vectoriel de l'algèbre des endomorphismes de $\mathbf{C}[X]$ engendré par les $p^n q^m$, n et m entiers $\geqslant 0$ (pour $n = m = 0$ on obtient l'application identique, Id $= p^0 q^0$, de $\mathbf{C}[X]$). On précise que pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, αId est abusivement noté α ; pour tous endomorphismes f, g de $\mathbf{C}[X]$, fg désigne $f \circ g$ et $[f, g] = fg - gf$.

Il sera particulièrement tenu compte de la rigueur de la rédaction; entre autre tout raisonnement par récurrence devra commencer par l'énoncé de l'hypothèse de récurrence.

PREMIÈRE PARTIE

1° Reconnaître l'application $[p, q]$ puis exprimer $[p^n, q]$, n entier $n \geqslant 1$, en fonction de p et n seulement.

Donner une formule analogue pour $[p, q^n]$.

2° Établir que l'on a pour n, m entiers, $n \geqslant m \geqslant 1$,

$$[p^n, q^m] = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \binom{n}{i} \binom{m}{i} p^{n-i} q^{m-i} \qquad (1)$$

où α_i est un entier non nul que l'on précisera.

Donner une formule analogue à (1) pour $[p^n, q^m]$ valable pour $m \geqslant n \geqslant 1$.

3° Montrer que la composition des applications confère à A une structure d'algèbre sur $\mathbf{C}$.

4° Montrer que les $p^n q^m$, pour n, m entiers positifs ou nuls forment une famille libre.

5° Déterminer l'ensemble

$$C = \{c \in A ; \quad \forall a \in A, \ [a, c] = 0\}$$

6° On appelle idéal de A tout sous-espace vectoriel I de A tel que pour tout élément a de A et tout élément i de I on ait

$$ai \in I \qquad \text{et} \qquad ia \in I$$

Montrer que les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A.

7° On appelle idéal à gauche de A tout sous-espace vectoriel J de A tel que pour tout élément a de A et tout élément j de J on ait

$$aj \in J$$

Quels sont les idéaux à gauche de A de dimension finie sur $\mathbf{C}$?

Soient J_1, J_2 deux idéaux à gauche de A avec $J_1 \subset J_2$. Que peut-on dire du sous-ensemble :

$$K = \{a \in A ; \quad \forall j \in J_2, \ aj \in J_1\} ?$$

Établir alors que si l'espace vectoriel-quotient J_2/J_1 est de dimension finie sur $\mathbf{C}$ on a : $J_2 = J_1$.

DEUXIÈME PARTIE

On appelle dérivation de A tout endomorphisme D de l'espace vectoriel A vérifiant, pour tous a, b éléments de A,

$$D(ab) = D(a)b + a\,D(b)$$

Soit D une dérivation de A.

1° Vérifier que Ker D $\supset \mathbf{C}$. Quelle relation a-t-on entre $[D(p), q]$ et $[p, D(q)]$?

2° On note D_a, $a \in A$, l'application $b \longmapsto [a, b]$, de A dans lui-même. Vérifier que D_a est une dérivation de A. Montrer qu'il existe $\alpha \in A$ tel que $D(p) = D_\alpha(p)$, $D(q) = D_\alpha(q)$. En déduire que D est de la forme D_a. Déterminer en fonction de α tous les éléments $a \in A$ tels que $D = D_a$.

On pose $r = pq$.

3° Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Établir que l'on a, pour tout n entier $\geqslant 0$,

$$p^n P(r) = P(r - n)p^n \qquad (2)$$

Donner une formule analogue pour $q^n P(r)$.

4° Démontrer que les valeurs propres de D_r sont les entiers. Caractériser les vecteurs propres associés à chaque entier k par leurs composantes sur les $p^n q^m$, n et m entiers $\geqslant 0$.

5° Exprimer $p^n q^m$, n et m entiers $\geqslant 0$, sous la forme $u\,P(r)$ où P est un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ dont on donnera les racines et u une puissance de p ou q à préciser.

Démontrer que le sous-espace propre de D_r associé à la valeur propre k admet comme famille génératrice libre les $u\,r^j$, j entier $\geqslant 0$, où u est une puissance de p ou q que l'on précisera en fonction de k.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail